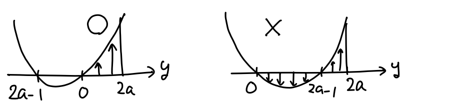
□5

(1)　円 $C: x^2+(y-a)^2=a^2$ 上のすべての点 (x, y) が領域 $y \geqq x^2$ に属するような a の範囲を求めたい.

円 C 上の点の y 座標の変域は $0 \leqq y \leqq 2a$ であり,
この範囲でつねに不等式

$$y \geqq a^2-(y-a)^2 \quad \text{つまり} \quad y^2-(2a-1)y \geqq 0$$

が成り立つ条件を求めればよく,



図より,　$2a-1 \leqq 0$

$\therefore \ \underline{0 < a \leqq \frac{1}{2}}$ //

(2)　円 $C: x^2+(y-a)^2=a^2$ 上のすべての点 (x, y) が領域 $y \geqq x^2-x^4$ に属するような a の範囲を求めたい.

円 C 上の点の y 座標の変域は $0 \leqq y \leqq 2a$ であり,
この範囲でつねに不等式

$$y \geqq a^2-(y-a)^2-\{a^2-(y-a)^2\}^2$$

$$\text{つまり} \ \underbrace{(y-a)^4-(2a^2-1)(y-a)^2+y-a^2+a^4}_{=f(y) \text{とおく}} \geqq 0$$

が成り立つ条件を求めればよい.

$$f'(y)=4(y-a)^3-2(2a^2-1)(y-a)+1$$

$f(0)=0$ だから, $0 \leqq y \leqq 2a$ においてつねに $f(y) \geqq 0$
となるためには $f'(0) \geqq 0$ が必要であり,

$$-4a^3+2a(2a^2-1)+1 \geqq 0 \qquad \therefore a \leqq \frac{1}{2}$$

これより, $0 < a \leqq \frac{1}{2}$ に限られる.

逆に, $0 < a \leqq \frac{1}{2}$ であれば
(1)より, C 上の点 (x, y) は必ず $y \geqq x^2$ を満たし,
また, $x^2 \geqq x^2-x^4$ であることから,
C 上の点 (x, y) は必ず $y \geqq x^2-x^4$ も満たす.
これより, $0 < a \leqq \frac{1}{2}$ である a はすべて適する.

よって, 求める a の範囲は $\underline{0 < a \leqq \frac{1}{2}}$ //.

(3)　曲線 $y=x^2-x^4$ は y 軸対称であり

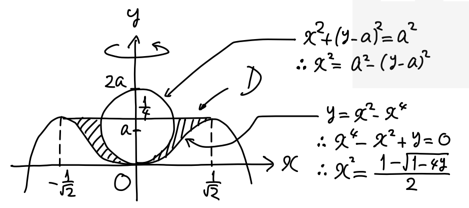
$$y'=2x-4x^3$$
$$=4x\left(\frac{1}{2}-x^2\right)$$

より, $x \geqq 0$ における増減は右のとおり.

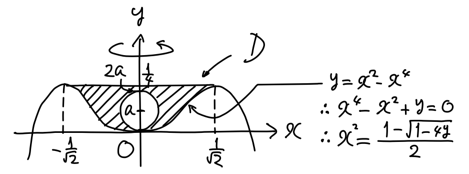
x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	(∞)
y'		$+$		$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$(-\infty)$

これより, 領域 D は下図のとおり.

(ア) $2a > \frac{1}{4}$ つまり $\frac{1}{8} < a \leqq \frac{1}{2}$ の場合.

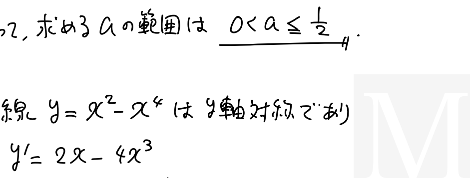


(イ) $2a \leqq \frac{1}{4}$ つまり $0 < a \leqq \frac{1}{8}$ の場合



求める回転体の体積 V は

(ア)の場合



$$V=\int_0^{\frac{1}{4}} \pi x^2 \, dy-\int_0^{\frac{1}{4}} \pi x^2 \, dy$$

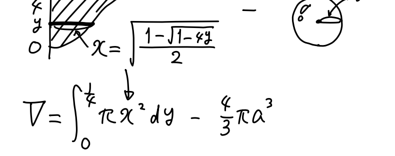
$$=\pi \int_0^{\frac{1}{4}}\left\{\frac{1-\sqrt{1-4y}}{2}-a^2+(y-a)^2\right\} dy$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}\left\{y+\frac{1}{6}(1-4y)^{\frac{3}{2}}\right\}-a^2y+\frac{1}{3}(y-a)^3\right]_0^{\frac{1}{4}}$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{4}-a\right)^3+a^3\right\}\right]$$

$$=\pi\left(-\frac{1}{16}a+\frac{3}{64}\right)$$

(イ)の場合



$$V=\int_0^{\frac{1}{4}} \pi x^2 \, dy-\frac{4}{3}\pi a^3$$

$$=\pi \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)-\frac{4}{3}\pi a^3$$

$$=\pi\left(\frac{1}{24}-\frac{4}{3}a^3\right)$$

よって,

$$V=\begin{cases} \pi\left(-\frac{1}{16}a+\frac{3}{64}\right) & \left(\text{if } \frac{1}{8} < a \leqq \frac{1}{2}\right) \\ \pi\left(\frac{1}{24}-\frac{4}{3}a^3\right) & \left(\text{if } 0 < a \leqq \frac{1}{8}\right) \end{cases}$$ //