東工大　入試問題

2022年

$\boxed{1}$	（60点） a，b を実数とし，$f(z)=z^2+az+b$ とする．a，b が $$\lvert a\rvert \leqq 1, \qquad \lvert b\rvert \leqq 1$$ を満たしながら動くとき，$f(z)=0$ を満たす複素数 z がとりうる値の範囲を複素数平面上に図示せよ．
$\boxed{2}$	（60点） 3 つの正の整数 a，b，c の最大公約数が 1 であるとき，次の問いに答えよ． (1)　$a+b+c$，$bc+ca+ab$，abc の最大公約数は 1 であることを示せ． (2)　$a+b+c$，$a^2+b^2+c^2$，$a^3+b^3+c^3$ の最大公約数となるような正の整数をすべて求めよ．
$\boxed{3}$	（60点） α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする．$\angle \mathrm{A}=\alpha$ および $\angle \mathrm{P}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たす直角三角形 APB が，次の 2 つの条件 (a)，(b) を満たしながら，時刻 $t=0$ から時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ まで xy 平面上を動くとする． (a)　時刻 t での点 A，B の座標は，それぞれ $\mathrm{A}(\sin t,\,0)$，$\mathrm{B}(0,\,\cos t)$ である． (b)　点 P は第一象限内にある． このとき，次の問いに答えよ． (1)　点 P はある直線上を動くことを示し，その直線の方程式を α を用いて表せ． (2)　時刻 $t=0$ から時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ までの間に点 P が動く道のりを α を用いて表せ． (3)　xy 平面内において，連立不等式 $$x^2-x+y^2<0, \qquad x^2+y^2-y<0$$ により定まる領域を D とする．このとき，点 P は領域 D には入らないことを示せ．
$\boxed{4}$	（60点） a は正の実数とする．複素数 z が $\lvert z-1\rvert=a$ かつ $z\neq\dfrac{1}{2}$ を満たしながら動くとき，複素数平面上の点 $w=\dfrac{z-3}{1-2z}$ が描く図形を K とする．このとき，次の問いに答えよ． (1)　K が円となるための a の条件を求めよ．また，そのとき K の中心が表す複素数と K の半径を，それぞれ a を用いて表せ． (2)　a が (1) の条件を満たしながら動くとき，虚軸に平行で円 K の直径となる線分が通過する領域を複素数平面上に図示せよ．
$\boxed{5}$	（60点） a は $0<a\leqq\dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数とし，$f(x)=\dfrac{4}{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-ax\right)$ とする．このとき，次の問いに答えよ． (1)　次の等式 $(*)$ を満たす a がただ 1 つ存在することを示せ． $$(*) \qquad \int_0^1 f(x)\,dx=1$$ (2)　$0\leqq b<c\leqq 1$ を満たす実数 b，c について，不等式 $$f(b)(c-b)\leqq\int_b^c f(x)\,dx\leqq f(c)(c-b)$$ が成り立つことを示せ． (3)　次の試行を考える． [試行]　n 個の数 $1,\,2,\,\cdots\cdots,\,n$ を出目とする，あるルーレットを k 回まわす． この [試行] において，各 $i=1,\,2,\,\cdots\cdots,\,n$ について i が出た回数を $S_{n,k,i}$ とし， $$(**) \qquad \lim_{k\to\infty}\frac{S_{n,k,i}}{k}=\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx$$ が成り立つとする．このとき，(1) の等式 $(*)$ が成り立つことを示せ． (4)　(3) の [試行] において出た数の平均値を $A_{n,k}$ とし，$A_n=\lim\limits_{k\to\infty}A_{n,k}$ とする．$(**)$ が成り立つとき，極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_n}{n}$ を a を用いて表せ．